あるReaction-Diffusion方程式について (応用科学における偏微分方程式の応用解析)

AUTHOR(S):

増田, 久弥

数理解析研究所講究録
386巻 1980年 70-74

あるReaction-diffusion方程式について

東大・教養　増田久弥

1、2種の生物の、互に影響を及ぼしながらの増殖を記述する常微分方程式のKolmogorov型は、

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = U\,M(U,V) \\ \dfrac{dV}{dt} = V\,N(U,V) \end{cases} \tag{1}$$

である。変数 U, V は、各個体群の総数を表わす。U, V が、空間領域 Ω に連続的に分布しているとき、U, V に対応する空間密度 u, v が興味の対象になる。それは、

$$U(t) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_\Omega u(x,t)\,dx \; ; \quad V(t) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_\Omega v(x,t)\,dx$$

によって、U, V と関係づけられる。もし2つの母集団が単純な拡散を受けているとすれば、次の偏微分方程式系を満たす；

$$\begin{cases} u_t = \nu_1 \Delta u + u M(u,v) \\ v_t = \nu_2 \Delta v + v N(u,v) \end{cases}, \quad x \in \Omega,\ t>0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = a(x)\ ; \quad v(x,0) = b(x) \tag{2'}$$

ここで、ν_1, ν_2 は非負の定数である。さらに、$a(x)$, $b(x)$ は整合条件を満たす十分滑らかな非負関数、境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad t>0,\ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

を課する。この境界条件は Ω の境界を越えては移住がないと解釈される。

この報告は、解の存在から、十分大きい時間の経過の後の解の挙動などであって、数学的である。生態系の観点の興味からいえば、基礎的なことにすぎない。(生態系についての詳細は、

[1] R. M. May, Stability and Complexity in Model Ecosystems, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1973)

[2] J. Maynard Smith, Models in Ecology, Cambridge (1974)

を参照して下さい。)

ここでは、(2) をさらに限定しよう。すなわち、次の2つの方程式を考える。

2. Rosenzweig-MacArthur 方程式

方程式 (2) の非線型項を次の如く分ける。

$$uM(u,v) = f(u) - \phi(u,v)$$
$$vN(u,v) = g(v) + \psi(u,v)$$

ここで、$f(u) = uM(u,0)$;

$$\phi(u,v) = -u\,(M(u,v) - M(u,0));$$
$$g(v) = v\,N(0,v);$$
$$\psi(u,v) = v\,(N(u,v) - N(0,v)).$$

f, g, ϕ, ψ に対して、次の仮定をおく。

仮定1. $\phi_u(u,v) > 0, \ \psi_v(u,v) < 0 \quad (\forall u, v > 0)$

仮定2. $\exists c > 0$ s.t. $f(u) = 0 \ (\forall u > c)$

仮定3. $\sup_{v>0} N(0,v) < 0$

仮定4. $\exists k > 0$; $k\,\phi(u,v) = \psi(u,v)$

(仮定4が特徴的である。)

このような仮定を満たす非線形項をもつ方程式 (2) を、Rosenzweig-MacArthur 方程式という。

これについて、Conway-Smoller は [SIAM J. A.M. 33 (1977). 673-686] で研究した。更に、Alikakos は [Comm. P.D.E. 4 (1979). 827-868] で次の結果を示した。

仮定5. $\exists\sigma\,(\geq 1)$; $\phi(u,v) \leq p(u)\, v^{\sigma}$

($p(u)$ は u につき単調関数)

仮定6. ν_1, ν_2 は正数

とする。

Alikakosの結果 ; 上の仮定1～6を仮定する。その上、

$$\sigma < \frac{n+2}{n} \quad (n\,;\text{空間次元}) \tag{4}$$

と仮定するならば、(2)の大域解は存在し、有界である。すなわち、 $\sup_{x,t} u(x,t) < +\infty$, $\sup_{x,t} v(x,t) < +\infty$.

しかし、上の σ に対する条件(4)はいかにも強い。実際、(4)は必要ないことが示し得た。

定理 1. 仮定1～6の下で(2)の有界な大域解が存在する。

3. Martin の問題

次は、Ecologyで大切な次の方程式を考える。

$$\begin{cases} u_t = \nu_1 \Delta u + u^{\beta} v \\ v_t = \nu_2 \Delta v - u^{\beta} v \end{cases} \tag{5}$$

ここで、ν_1, ν_2 は正定数、β は正定数 ≥ 1.

"(5), (2'), (3)の有界な大域解の存在を示せ" というのが、

いわゆる Martin の問題である。これに対して、Alikakos は $\beta < \frac{n+2}{n}$ のとき、解いた。しかしながら、我々は次の定理の成立を知る：

定理 2. 任意の $\beta \geq 1$ に対して、(5), (2)', (3) は有界な大域解をもち、($L^\infty(\Omega)$ の位相で)

$$\lim_{t \to \infty} u(x,t) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)} \int_\Omega (a(x) + b(x))\, dx$$

$$\lim_{t \to \infty} v(x,t) = 0$$